

به نام خدا

امتحان میان‌ترم دوم مکانیک تحلیلی I دانش‌گاه الزهرا - آذرماه ۹۴

مسئله ۱ الف - ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی مرکزی با پتانسیل

$$V(r) = Kr^4, \quad (K > 0)$$

قرار دارد. این ذره در مسیری دایره‌ای به شعاع a در حرکت است.

الف - سرعت زاویه‌ای حرکت دایره‌ای را به دست آورید.

ب - حالا اگر حرکت این ذره را کمی مختل می‌کنیم، فرکانس نوسان‌های

شعاعی حول حرکت دایره‌ای چیست؟ مسیر بسته است یا باز؟ چرا؟

مسئله ۲ الف - ماهواره‌ای به جرم M با سرعت v_0 تحت تأثیر نیروی

گرانش سیاره‌ای در مسیر دایره‌ای به شعاع R به دور سیاره می‌گردد. وقتی

ماهواره به نقطه‌ی A می‌رسد، ضربه‌ای به آن وارد می‌شود به طوری که مسیر

جدیدش بیضی‌ای است که A نقطه‌ی حضیضش می‌شود و نقطه‌ی اوج آن B

در فاصله‌ی $2R$ از سیاره است.

الف ۱ - انرژی جنبشی جدید و تکانه‌زاویه‌ای جدید ماهواره چه قدر

است؟

الف ۲ - ضربه در نقطه‌ی A چگونه باشد تا انرژی جنبشی و تکانه‌زاویه‌ای

ماهواره این مقدار شده باشند؟

ب - وقتی ماهواره به نقطه‌ی B رسید، ضربه‌ای به آن وارد می‌شود به

طوری که مسیرش دایره‌ای به شعاع $2R$ شود.

ب ۱ - انرژی جنبشی جدید و تکانه‌زاویه‌ای جدید ماهواره چه قدر است؟

ب ۲ - ضربه در نقطه‌ی B چگونه باشد تا انرژی جنبشی و تکانه‌زاویه‌ای

ماهواره این مقدار شده باشند؟

راهنمایی: این روابط ممکن است به دردتان بخورد

$$V(r) = -\frac{K}{r} \quad (K > 0), \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}} \quad r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2} F\left(\frac{1}{u}\right), \quad u := \frac{1}{r}$$